

SULLE COSTANTI ARBITRARIE
NEGL' INTEGRALI
DELLE EQUAZIONI LINEARI
COSÌ DIFFERENZIALI CHE A DIFFERENZE FINITE

609156

3)

SULLA DETERMINAZIONE

DELLE COSTANTI ARBITRARIE

NEGL' INTEGRALI

DELLE EQUAZIONI LINEARI

COSÌ DIFFERENZIALI CHE A DIFFERENZE FINITE

MEMORIA

DI

NICOLA TRUDI



NAPOLI

STAMPERIA DEL FIBRENO

Pignatelli a san Giov. maggiore 56

1866

*Memoria estratta dal Vol. II. degli Atti della R. Accademia
delle Scienze Fisiche e Matematiche*



Notizie intorno al soggetto della memoria

Si sa che la risoluzione di quistioni importanti dipende da una opportuna determinazione delle costanti arbitrarie, le quali completano gli integrali delle equazioni differenziali lineari. Supposta un'equazione di tal natura dell'ordine n^{ma} , ordinariamente la determinazione di quelle costanti vuol'essere regolata in guisa che, per un particolare valore assegnato alla variabile, la funzione e le sue successive $n-1$ derivate prendano valori anche assegnati; ed è nota la bellissima soluzione di questa quistione data dall'illustre LAGRANGE; soluzione da cui risulta che i valori delle costanti, i quali soddisfano alle condizioni prescritte, si hanno ne' numeratori delle frazioni parziali in cui può decomporci una certa funzione fratta razionale, che ha per denominatore il primo membro della equazione algebrica di grado n da cui dipendono gl'integrali particolari su' quali è fondata la integrazione completa. Ma si sa del pari che questa soluzione è limitata esclusivamente al caso in cui le radici della detta equazione sono tra loro tutte disuguali.

Dobbiamo tuttavolta osservare che lo stesso LAGRANGE avea cercato di estendere la sua soluzione anche al caso delle radici uguali: soluzione venuta a nostra contezza per la circostanza singolare di possedere un volume degli Atti dell'Accademia di Berlino, ov'essa è pubblicata; ch'è quello per l'anno 1775. Ma condotti per talune ricerche ad applicar le

formole date a quest'uopo da quel gran geometra, disaccordi visibili nei risultamenti del calcolo ci fecero concepire il sospetto che potessero non essere esatte; ed il sospetto fu mutato in certezza dopochè, cercando a dimostrare quelle formole, che LAGRANGE si limita soltanto ad accennare, trovammo di aver raggiunto una soluzione diversa, ma interamente uniforme a quella data dal medesimo geometra pel caso delle radici disuguali.

Aggiungiamo che una quistione del tutto analoga a quella, della quale è parola, si trova nella teoria delle equazioni lineari a differenze finite; ed è propriamente a riguardo di queste ultime equazioni che fu data da LAGRANGE la risoluzione della quistione di cui si tratta.

Ignorando allora se fossero già fatte da altri le osservazioni che abbiamo presentate intorno a queste ricerche di LAGRANGE, non avevamo ommesso di assicurarcene per ogni via; ma le nostre indagini furono per buona pezza infruttuose. Però, non ha guari, volendo riscontrare una memoria del PAOLI, tanto conosciuta da' geometri, relativa alle equazioni a differenze finite ed alla partizione de' numeri, che trovasi nel secondo volume delle memorie della Società Italiana, ci venne a caso sott'occhio nel seguente volume terzo una memoria del Malfatti dal titolo — *Delle serie ricorrenti* — e non fu lieve la nostra sorpresa scorgendo che in essa quel distinto geometra Italiano comincia appunto dallo esaminare le formole già dette di LAGRANGE, e le riconosce inesatte. Nè solo egli mette in vista il difetto, ma si è studiato a correggerlo ed a dare le formole convenienti per la risoluzione della quistione. Ora un lavoro così interessante del Malfatti sembra interamente ignorato da' geometri; ed è inconcepibile come ciò potesse verificarsi; tanto più che questa memoria, di presso a cento pagine, è quasi una continuazione di quella del PAOLI, ed ha per oggetto principale i medesimi problemi sulla partizione dei numeri del PAOLI considerati.

Se fosse lecito di pronunciare un motivo che abbia potuto influire a tener nell'oblio questo lavoro dottissimo del Malfatti, noi dovremmo unicamente trovarlo nella esposizione alquanto pesante delle sue ricerche, le quali per una parte fondano sopra induzioni, anzichè sopra dimostrazioni generali, essendo guidate dallo esame di molti casi particolari, il che impegna a calcoli prolissi, cui non è così agevole di seguire attentamente; e per altra parte sopra una specie particolare di algoritmo di derivazione, da lui espressamente immaginato. Ma tutto ciò nulla toglie alla importanza delle sue deduzioni.

Intanto il pensiero che le osservazioni di MALFATTI avessero dovuto ben giungere a cognizione di LAGRANGE, ci spinse ad esaminare diligentemente i volumi delle memorie dell' Accademia di Berlino, posteriori a quello del 1775; e mal non ci apponemmo: chè nel volume pel 1792 ci venne fatto di ritrovare una nota che si rapporta all'argomento del quale è parola, e che ha per titolo: *Sur l'expression du terme général des séries récurrentes, lorsque l'équation génératrice a des racines égales* — In questa nota, appunto provocata dalle osservazioni del MALFATTI, LAGRANGE dichiara la cagione della inesattezza incorsa nelle antiche sue formole, facendo vedere essere ciò dipeso dall'aver Egli riguardato indipendenti quantità variabili che nol sono, e mostra come la soluzione debba rettificarsi.

Ma quella nota, che pure sembra poco conosciuta dai geometri, offre una particolarità memorabile intorno alla vita scientifica del Grande Analista, il quale in quel rincontro sembrò come punto che un altro avesse dovuto prevenirlo nel porre in rilievo la inesattezza delle antiche sue formole. E di fatti la nota suddetta conchiude con un'altra bellissima soluzione della stessa quistione; ma, cosa singolare per LAGRANGE, mentre Egli non fa che annunciare la nuova soluzione, senza darne alcuna pruova, come avea fatto nelle prime ricerche, questa volta invita formalmente i geometri a dimostrarla, il che non era certamente nelle sue abitudini. Ma crediamo questo tratto troppo importante per non doverci dispensare dal riportare qui testualmente le sue proprie parole... « Ces
« formules sont un peu différentes de celles que j'avois données sans démonstration dans le mémoire cité pour le cas de l'égalité des racines.

« Je m'étois aperçu de leur inexactitude après l'impression du mémoire, mais entraîné par d'autres objets, j'avois toujours différé à revenir sur celui-ci que je regardois comme moins important; et j'ai été
« prévenu à cet égard par un membre de la Société Italienne, JEAN FRANCOIS MALFATTI, qui a donné sur ce sujet un savant mémoire dans le troisième tome du recueil de cette Société. Comme l'analyse de ce travail est fort longue et conduit à des résultats un peu compliqués, j'ai
« cru devoir chercher à résoudre cette question d'une manière plus directe et plus conforme à la simplicité de la méthode générale exposée
« dans mon mémoire de 1775; c'est ce qui a occasionné les recherches
« précédentes; mais quoique les formules auxquelles je suis parvenu
« ne paroissent rien laisser à désirer pour la simplicité et la généralité;
« néanmoins, comme ces formules sont différentes pour les différentes

« cas de l'égalité de deux racines, de trois, de quatre, etc., on pour-
« roit désirer encor une formule qui renfermât tous les cas; et voici celle
« que j'ai trouvée, et que je présente aux géomètres, en les invitant à
« la démontrer directement ».

Nel corso di queste ricerche avremo occasione da far conoscere e dimostrare il teorema di LAGRANGE; ma ci sia lecito di aggiungere che, mancando una storia di queste teorie, nè offrendo all' uopo alcuna notizia i libri in cui si trattano siffatti argomenti, ignorammo per buona pezza se qualche geometra avesse corrisposto all' invito di LAGRANGE; nè ciò può sorprendere nello stato attuale della scienza. Però non ha guari, leggendo un cenno biografico di JACOBI, scritto da DIRICHLET, ed inserito nel volume VII degli Annali di Matematica del TORTOLINI (*), abbiamo appreso che il gran geometra di Königsberg esordiva la sua luminosa carriera scientifica appunto con la dimostrazione di quel teorema in una memoria pubblicata nel 1825, vale a dire 34 anni dopo la proposta di LAGRANGE, e che ha per titolo: *Disquisitiones analyticae de fractionibus simplicibus*. Ma tutte le ricerche furono vane per aver sott'occhio questa memoria di JACOBI, forse la sola non pubblicata nel Giornale di CRELLE, e della quale non si ha notizia nelle nostre Biblioteche.

(*) Tradotto dal tedesco in italiano dal chiarissimo professor GIOVANNI NOVI.

§ 1

Le ricerche di cui ci occuperemo esigono che siano dichiarate alcune proprietà di un sistema di funzioni dedotte con una certa legge da una funzione intera di una variabile: funzione che indicheremo con $F(z)$, e supporremo:

$$F(z) = p_0 z^n + p_1 z^{n-1} + \dots + p_{n-1} z + p_n.$$

Se da questa funzione si sopprima l'ultimo termine, poscia i due ultimi, indi i tre ultimi, e così di seguito, finchè rimanga il solo primo termine, ed i resti si dividano ordinatamente per le potenze $z, z^2, z^3, \dots, z^n$, i quozienti formeranno un sistema di funzioni di gradi decrescenti $n-1, n-2, \dots, 1, 0$, l'ultima delle quali si riduce a p_0 , coefficiente del primo termine di $F(z)$. Noi dinoteremo queste funzioni con la stessa caratteristica F adottata per la funzione da cui derivano, variandola però con indici, che ne esprimano i gradi, di modo che sarà:

$$\begin{aligned} F_0(z) &= p_0 \\ F_1(z) &= p_0 z + p_1 \\ (1) \quad F_2(z) &= p_0 z^2 + p_1 z + p_2 \\ &\vdots \\ F_{n-1}(z) &= p_0 z^{n-1} + p_1 z^{n-2} + p_2 z^{n-3} + \dots + p_{n-1} \end{aligned}$$

Una prima proprietà di queste funzioni consiste in ciò che, se la funzione primitiva $F(z)$ si divida per una potenza qualunque del binomio $x-a$, essendo a una quantità arbitraria, il quoziente intero di questa divisione si può immediatamente esprimere per mezzo de' valori che prendono per $x=a$ le derivate delle funzioni (1) di un ordine inferiore di un'unità al grado della potenza del divisore. Per dimostrarlo supporremo che $Q_1, Q_2, Q_3, \dots$ siano i quozienti interi provenienti rispettivamente dalla divisione di $F(z)$ per le potenze $x-a, (x-a)^2, (x-a)^3, \dots$; e siccome il resto della prima di queste divisioni è espresso da $F(a)$, avremo identicamente:

$$\frac{F(z)}{x-a} = Q_1 + \frac{F(a)}{x-a}.$$

Ora questa equazione identica può con sole derivazioni rispetto ad a dar subito le espressioni degli altri quozienti $Q_2, Q_3, \dots$. In fatti, riflettendo

che il quoziente Q_i è funzione di a , se di quella equazione si prenda la derivata di un ordine qualunque i , e quindi si dividano i due membri pel prodotto $1.2.3 \dots i$, indicando questo prodotto col simbolo $\Pi(i)$ (notazione la quale importa $\Pi(0) = 1$), si avrà quest'altra equazione identica:

$$(2) \quad \frac{F(z)}{(z-a)^{i-1}} = \frac{1}{\Pi(i)} \left[\frac{1}{\Pi(i)} D^i Q_i + D^i \frac{F(a)}{z-a} \right].$$

È manifesto intanto che l'ultimo termine del fattore binomio del secondo membro, a derivazioni eseguite, diviene un fratto il quale ha per denominatore lo stesso divisore del primo membro, e per numeratore una funzione di z di grado inferiore a quello del denominatore. In conseguenza questo numeratore esprimerà il resto della divisione indicata nel primo membro; e da ciò risulta che il quoziente intero di siffatta divisione dee coincidere col primo termine del secondo membro; e siccome questo quoziente è rappresentato da Q_{i-1} si avrà:

$$(3) \quad Q_{i-1} = \frac{1}{\Pi(i)} D^i Q_i.$$

Da un'altra parte bisogna osservare che il primo quoziente Q_1 è una funzione intera di z di grado $n-1$, ed è perciò della forma:

$$Q_1 = q_n z^{n-1} + q_{n-1} z^{n-2} + q_{n-2} z^{n-3} + \dots + q_{n-1};$$

ma essendo per la natura della divisione:

$$q_n = p_n$$

$$q_{n-1} = p_n a + p_{n-1}$$

$$q_{n-2} = p_n a^2 + p_{n-1} a + p_{n-2}$$

$$q_{n-1} = p_n a^{n-1} + p_{n-1} a^{n-2} + p_{n-2} a^{n-3} + \dots + p_{n-1}.$$

a causa delle funzioni (1) sarà:

$$q_n = F(a), \quad q_{n-1} = F_1(a), \quad \dots, \quad q_{n-1} = F_{n-1}(a);$$

e quindi si ottiene:

$$Q_1 = F_n(a) z^{n-1} + F_{n-1}(a) z^{n-2} + F_{n-2}(a) z^{n-3} + \dots + F_{n-1}(a).$$

Prendendo ora la derivata i^{ma} di Q_1 rispetto ad a , e tenendo presente che

il valore di $F'_i(a)$ è nullo se $s > r$, in virtù della (3) si avrà la formola seguente:

$$Q_{i,s} = \frac{1}{\Omega(i)} \left[F'_i(a) z^{s-i-1} + F'_{i+1}(a) z^{s-i-2} + \dots + F'_{i+s}(a) z + F'_{i+s-1}(a) \right],$$

la quale, ponendovi $i=0, 1, 2$, etc: dà i valori di tutti i quozienti Q_0, Q_1, Q_2 , etc.

Quando $F(z)$ è divisibile per $(z-a)^{r+1}$ si ha la formola:

$$\frac{F(z)}{(z-a)^{r+1}} = \frac{1}{\Omega(i)} \left[F'_i(a) z^{r-i-1} + F'_{i+1}(a) z^{r-i-2} + \dots + F'_{i+r}(a) z + F'_{i+r-1}(a) \right],$$

vera pe' valori di i compresi nella serie $0, 1, 2, \dots, i$. Perciò, se $z-a$ è fattore semplice di $F(z)$, sarà:

$$\frac{F(z)}{z-a} = F_0(a) z^{r-1} + F_1(a) z^{r-2} + \dots + F_{r-1}(a) z + F_{r-1}(a);$$

se quel fattore è doppio:

$$\frac{F(z)}{(z-a)^2} = F'_1(a) z^{r-2} + F'_2(a) z^{r-3} + \dots + F'_{r-2}(a) z + F'_{r-2}(a);$$

se triplo si avrà:

$$\frac{F(z)}{(z-a)^3} = \frac{1}{1.2} \left[F''_1(a) z^{r-3} + F''_2(a) z^{r-4} + \dots + F''_{r-2}(a) z + F''_{r-2}(a) \right];$$

e così di seguito.

Un'altra proprietà delle funzioni (1) è un fatto semplicissimo dipendente dalla natura della derivazione. Adoprando, come è costume, il simbolo (i), per dinotare il coefficiente binomiale:

$$\frac{i(i-1)(i-2)\dots(i-r+1)}{1.2.3\dots r},$$

notazione la quale importa $(i)_0=1$, $(i)_1=i$, osserveremo che la serie $(i)_1, (i+1)_1, (i+2)_1$, etc: coincide con quella dei numeri figurati dell'ordine i , computando di 1° ordine i numeri naturali $1, 2, 3, \dots$. Ciò premesso scriviamo in ordine inverso una qualunque delle funzioni (1), per esempio $F_r(z)$, che è di grado r , ed avremo:

$$F_r(z) = p_r + p_{r-1}z + p_{r-2}z^2 + \dots + p_0z^r.$$

Moltiplicando uno ad uno i termini di questa funzione pe' primi $r+1$

termini della serie de' numeri figurati di un ordine qualunque i , vale a dire per:

$$(i), \quad (i+1), \quad (i+2), \quad \dots, \quad (i+r).$$

si ha quest'altra funzione di grado r :

$$(i), p_r + (i+1), p_{r-1}z + (i+2), p_{r-2}z^2 + \dots + (i+r), p_0 z^r;$$

e la proprietà che intendiamo di porre in rilievo consiste in ciò che questa funzione così formata equivale alla derivata i^{ma} di quella tra le funzioni (1) che è del grado $i+r$, cioè della funzione $F_{i+r}(z)$, divisa pel prodotto $1.2.3\dots i$; in guisa che si avrà:

$$(i), p_r + (i+1), p_{r-1}z + (i+2), p_{r-2}z^2 + \dots + (i+r), p_0 z^r = \frac{F_{i+r}'(z)}{1.2.3\dots i}.$$

§ II

Data l'equazione differenziale dell'ordine n a coefficienti costanti:

$$(4) \quad p_n \frac{d^n y}{dx^n} + p_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + p_1 \frac{dy}{dx} + p_0 y = 0,$$

si sa che il suo integrale completo dipende dalle radici dell'equazione:

$$F(z) = p_n z^n + p_{n-1} z^{n-1} + \dots + p_1 z + p_0 = 0.$$

Sia α una di queste radici che potrà essere o semplice o multipla. Se la radice è semplice la medesima darà all'integrale un termine della forma:

$$A e^{\alpha(x-\omega)},$$

dove A figura una costante arbitraria ed ω un valore qualunque particolare di x . Ma se la radice α è multipla, e pongasi di grado α , allora rappresentata con X_α una funzione indeterminata di x di grado $\alpha-1$, e perciò affetta da α costanti arbitrarie, quella radice introdurrà nell'integrale un termine della forma:

$$X_\alpha e^{\alpha(x-\omega)},$$

ω indicando come prima qualunque particolare valore di x . Noi daremo alla funzione X_α la forma seguente:

$$X_\alpha = A_{\alpha-1} + A_{\alpha-2}(x-\omega) + A_{\alpha-3} \frac{(x-\omega)^2}{1.2} + \dots + A_0 \frac{(x-\omega)^{\alpha-1}}{1.2.3\dots(\alpha-1)}$$

in cui $A_0, A_1, \dots, A_{\alpha-1}$ dinotano le α costanti arbitrarie. Quando $\alpha=1$

de' prodotti. È chiaro che nel primo membro della somma si riproduce la funzione $\phi(z)$, definita nella formola (7). Inoltre se si ponga:

$$(12) \quad M_n = V_{n,n} F_{n-1}(z) + V_{n,n-1} F_{n-2}(z) + \dots + V_{n,2} F_{n-2}(z) + \dots + V_{n,n-1} F_1(z);$$

o si ritenga che $M_n, M_{n-1}, \dots$ rappresentino espressioni somiglianti in $b, c, \dots$, il secondo membro sarà la somma di $M_1, M_2, \dots$; e si avrà in conseguenza:

$$(13) \quad \phi(z) = M_1 + M_2 + \dots + M_r;$$

ma importa di porre in evidenza la composizione de' termini di questa formola.

Fermandoci adunque a considerare l'espressione di M_r data nella (12), dovremo cercare i valori delle quantità $V_{n,n}, V_{n,n-1}$, etc.; i quali si ottengono dalla (9) dando ad r i valori successivi $0, 1, 2, \dots, n-1$; e si ha in tal guisa:

$$V_{n,n} = A_{n-1}$$

$$V_{n,n-1} = A_{n-2}a + (1)_1 A_{n-3}$$

$$V_{n,n-2} = A_{n-3}a^2 + (2)_1 A_{n-4}a + (2)_2 A_{n-5}$$

$$V_{n,n-3} = A_{n-4}a^3 + (3)_1 A_{n-5}a^2 + (3)_2 A_{n-6}a + (3)_3 A_{n-7}$$

$$V_{n,n-4} = A_{n-5}a^4 + (4)_1 A_{n-6}a^3 + (4)_2 A_{n-7}a^2 + (4)_3 A_{n-8}a + (4)_4 A_{n-9}$$

$$V_{n,n-5} = A_{n-6}a^5 + (5)_1 A_{n-7}a^4 + (5)_2 A_{n-8}a^3 + (5)_3 A_{n-9}a^2 + (5)_4 A_{n-10}a + (5)_5 A_{n-11}$$

$$V_{n,n-6} = A_{n-7}a^6 + (6)_1 A_{n-8}a^5 + (6)_2 A_{n-9}a^4 + (6)_3 A_{n-10}a^3 + (6)_4 A_{n-11}a^2 + (6)_5 A_{n-12}a + (6)_6 A_{n-13}$$

Se queste equazioni si moltiplichino ordinatamente per le funzioni $F_{n-1}(z), F_{n-2}(z), \dots, F_0(z)$, e si faccia la somma de' prodotti, nel primo membro della somma si riprodurrà l'espressione di M_n come si ha nella (12); e però, se il secondo membro si supponga ordinato rispetto alle costanti $A_{n-1}, A_{n-2}, \dots, A_0$, la detta somma avrà la forma:

$$(14) \quad M_n = \mu_0 A_{n-1} + \mu_1 A_{n-2} + \dots + \mu_{n-1} A_0.$$

Per determinare l'espressione di μ_r osserveremo che nella serie delle pre-

(*) Si può osservare che nella serie di queste espressioni la prima ha un termine solo, la seconda due, la terza tre, e così di seguito fino a quella che darebbe il valore di $V_{n,n-1}$, la quale conterrebbe perciò tutte le n costanti $A_{n-1}, A_{n-2}, \dots, A_2, A_1, A_0$, e l'esponente di a ne' loro ultimi termini è sempre zero. Egli è poi chiaro che ciascuna delle altre espressioni conterrà sempre di n termini, e conterrà tutte le costanti; e da ciò poi segue che nella serie delle seguenti espressioni di $V_{n,n}, V_{n,n-1}, \dots, V_{n,n-1}$ gli ultimi termini debbono sempre contenere la costante A_0 , ed essere rispettivamente affetti dalle potenze $a^1, a^2, a^3, \dots, a^{n-1}$.

cedenti eguaglianze la prima a contenere la costante A_{n-i-1} è quella che dà il valore di $V_{e,s}$; e perciò dovendo questa eguaglianza moltiplicarsi per $F_{n-i-1}(z)$, messo per compendio:

$$n-i-1=s,$$

risulterà:

$$\mu = (i)F_i(z) + (i+1)F_{i+1}(z)a + (i+2)F_{i+2}(z)a^2 + \dots + (i+s)F_{i+s}(z)a^s + \dots + (n-1)F_n(z)a^n.$$

Siccome questa espressione di μ , è una funzione intera di z di grado s , si può supporre:

$$(15) \quad \mu = k_s z^s + k_{s-1} z^{s-1} + \dots + k_1 z + k_0;$$

e per determinare in generale il coefficiente k_s si osserverà che nella detta espressione la potenza z^{s-1} deve trovarsi solamente ne' termini che sono moltiplicati per le funzioni $F_1(z), F_{i-1}(z), \dots, F_{i+s-1}(z)$, perchè le rimanenti $F_{i+s+1}(z), \dots, F_n(z)$ sono tutte di grado inferiore ad $s-i$. Ma i coefficienti di quella potenza nelle dette funzioni sono rispettivamente $p_i, p_{i+1}, p_{i+2}, \dots, p_0$; dunque si ottiene:

$$k_s = (i)p_i + (i+1)p_{i+1}a + (i+2)p_{i+2}a^2 + \dots + (i+s)p_0a^s.$$

È manifesto intanto che si riproduce questa stessa espressione se i termini della funzione:

$$F_i(a) = p_i + p_{i+1}a + p_{i+2}a^2 + \dots + p_0a^s$$

si moltiplichino uno ad uno pe' termini della serie numerica:

$$(i), \quad (i+1), \quad (i+2), \quad \dots, \quad (i+s),$$

che sono i primi termini della serie de' numeri figurati dell'ordine i ; dunque, per la seconda delle proprietà dichiarate nel § 1, il valore trovato di k_s sarà equivalente alla derivata i^{s-1} di $i+s$, $F_{i+s}(a)$, divisa pel prodotto $1.2.3\dots i$; e si ha in conseguenza:

$$k_s = \frac{F_{i+s}(a)}{1.2.3\dots i}.$$

Questa formola, facendovi successivamente $s=0, 1, 2, \dots, s$, porge i

valori di tutti i coefficienti della espressione di μ , data dalla (15); e però essendo $s=n-i-1$, si avrà:

$$\mu = \frac{F_i(a)}{1.2 \dots i} z^{n-i-1} + \frac{F_{i+1}(a)}{1.2 \dots i} z^{n-i-2} + \dots + \frac{F_{i+n-1}(a)}{1.2 \dots i}.$$

Ora, ricordando la prima delle proprietà dichiarate nel § 1, si riconoscerà che il secondo membro dell'ultima equazione esprime il quoziente intero della divisione di $F(z)$ per $(z-a)^{i+1}$; ma siccome questa divisione non dà resto finchè $i < s$, perchè per ipotesi $(z-a)^s$ è fattore di $F(z)$, ne segue che per tutti i valori di i compresi nella serie $0, 1, 2, \dots, s-1$ sussisterà la formola:

$$\mu_i = \frac{F(z)}{(z-a)^{i+1}},$$

la quale a sua volta definisce i valori de' coefficienti della espressione di M_s data nella equazione (14); di modo che si ha in fine:

$$M_s = F(z) \left[\frac{A_{s-1}}{z-a} + \frac{A_{s-2}}{(z-a)^2} + \dots + \frac{A_s}{(z-a)^s} \right].$$

Espressioni somiglianti si otterrebbero evidentemente per M_t, M_r , etc.; e quindi in virtù della formola (13) si avrà:

$$\begin{aligned} \psi(z) = & F(z) \left[\frac{A_{s-1}}{z-a} + \frac{A_{s-2}}{(z-a)^2} + \dots + \frac{A_s}{(z-a)^s} \right] \\ & + F(z) \left[\frac{B_{t-1}}{z-b} + \frac{B_{t-2}}{(z-b)^2} + \dots + \frac{B_t}{(z-b)^t} \right] \\ & \dots \dots \dots \\ & + F(z) \left[\frac{L_{r-1}}{z-l} + \frac{L_{r-2}}{(z-l)^2} + \dots + \frac{L_r}{(z-l)^r} \right]. \end{aligned}$$

Dividendo i due membri di questa equazione per $F(z)$ si riproduce la relazione annunciata nel teorema, il quale resta in tal guisa completamente dimostrato.

Segue per tanto da questo teorema che la determinazione effettiva delle costanti $A_s, A_t, \dots, A_{r-s}$ va interamente rimessa alla teoria della

decomposizione delle funzioni fratto; e con ciò la quistione è perfettamente risolta. Così, messo per compendio:

$$F(z) = (z-a)^n f(z)$$

si potrà far capo dalla formola conosciuta:

$$A_i = \frac{1}{n(i)} D^n \frac{\phi(a)}{f(a)},$$

la quale dà i valori di tutte le α costanti, non esclusa A_0 , perchè $\Pi(0)=1$. Ma pel calcolo numerico sarà forse più opportuno di far dipendere questi valori gli uni dagli altri, ricorrendo alle formole ben conosciute:

$$\begin{aligned} \phi(a) &= f(a) A_0 \\ \phi'(a) &= f'(a) A_0 + f(a) A_1 \\ \frac{\phi''(a)}{1.2} &= \frac{f''(a)}{1.2} A_0 + f'(a) A_1 + f(a) A_2 \\ \frac{\phi'''(a)}{1.2.3} &= \frac{f'''(a)}{1.2.3} A_0 + \frac{f''(a)}{1.2} A_1 + f'(a) A_2 + f(a) A_3 \\ \text{etc:} & \qquad \text{etc:} \qquad \text{etc:} \qquad \text{etc:} \end{aligned}$$

La ricerca della quale ci siamo occupati perde ogni difficoltà quando l'equazione $F(z)=0$ non ha radici uguali. In questa ipotesi l'integrale completo della equazione (4) si riduce ad:

$$y = A e^{a(x-a)} + B e^{b(x-a)} + \dots + L e^{l(x-a)};$$

quindi invece della formola (10), dalla quale dipendono in generale le equazioni che determinano le costanti, nel caso attuale si ha l'altra assai più semplice:

$$y_r = A e^r + B e^r + \dots + L e^r;$$

e questa, dando ad r i valori successivi $0, 1, 2, \dots, n-1$, porge subito il conosciuto sistema di equazioni:

$$\begin{aligned} y_0 &= A + B + \dots + L, \\ y_1 &= A e + B e + \dots + L e \\ y_2 &= A e^2 + B e^2 + \dots + L e^2 \\ &\dots \dots \dots \\ y_{n-1} &= A e^{n-1} + B e^{n-1} + \dots + L e^{n-1}; \end{aligned}$$

Per risolvere queste equazioni si possono tenere diverse vie; ma lo stesso

metodo che abbiamo seguito pel caso generale diviene ora semplicissimo. In fatti, moltiplicandole ordinatamente per le funzioni $F_{n-1}(z)$, $F_{n-2}(z)$, ..., $F_0(z)$, e facendo la somma de' prodotti, nel primo membro della somma si riproduce la funzione $\phi(z)$; e quindi, posto:

$$\begin{aligned} N_a &= F_{n-1}(z) + F_{n-2}(z)a + F_{n-3}(z)a^2 + \dots + F_0(z)a^{n-1} \\ N_b &= F_{n-1}(z) + F_{n-2}(z)b + F_{n-3}(z)b^2 + \dots + F_0(z)b^{n-1} \\ \text{etc:} & \qquad \qquad \text{etc:} \qquad \qquad \text{etc:} \qquad \qquad \text{etc:} \end{aligned}$$

si avrà:

$$\phi(z) = AN_a + BN_b + \dots + LN_l$$

Ora l'espressione superiore di N_a equivale al quoziente di $F(a)$ divisa per $a - z$; ma questo quoziente è identico a quello di $F(z)$ divisa per $z - a$; dunque risulta:

$$N_a = \frac{F(z)}{z-a}, \quad N_b = \frac{F(z)}{z-b}, \quad \dots, \quad N_l = \frac{F(z)}{z-l};$$

e si ha perciò:

$$\phi(z) = F(z) \left(\frac{A}{z-a} + \frac{B}{z-b} + \dots + \frac{L}{z-l} \right);$$

ovvero:

$$\frac{\phi(z)}{F(z)} = \frac{A}{z-a} + \frac{B}{z-b} + \dots + \frac{L}{z-l}.$$

In questa formola è riprodotto il teorema precedente, limitato al caso delle radici disuguali; ma quindi vedesi che la determinazione delle costanti procede sempre nella stessa maniera, qualunque sia la natura delle radici dell'equazione $F(z) = 0$. Quando tutte le radici sono disuguali per le teoriche della decomposizione delle frazionj i valori delle costanti A, B, etc: sono definiti dalle formole:

$$(16) \quad A = \frac{\phi'(a)}{F'(a)}, \quad B = \frac{\phi'(b)}{F'(b)}, \quad \dots, \quad L = \frac{\phi'(l)}{F'(l)};$$

ed è appunto in queste formole che consiste la soluzione data da LAGRANGE del precedente sistema particolare di equazioni lineari.

Seconda dimostrazione

Supporremo qui ritenuta la parte iniziale della precedente dimostrazione diretta a stabilire la formola:

$$(17) \quad y_r = V_{0,r} + V_{1,r} + \dots + V_{r,r}$$

da cui dipendono le equazioni (11) che determinano le n costanti, ed osserveremo che le espressioni di $V_{0,r}$, $V_{1,r}$, etc. si possono mettere sotto la forma:

$$(18) \quad V_{0,r} = \sum_{i=0}^r \frac{r(r-1)\dots(r-i+2)}{1.2\dots(i-1)} a^{r-i-1} A_{i-1}, \quad V_{1,r} = \sum_{i=1}^r \frac{r(r-1)\dots(r-i+2)}{1.2\dots(i-1)} b^{r-i-1} B_{i-1}, \text{ etc.}$$

Posto ciò, derivando r volte di seguito la (4), si ha l'altra equazione:

$$P_0 \frac{d^{r+1}y}{dx^{r+1}} + P_1 \frac{d^{r+1}y}{dx^{r+1}} + \dots + P_{n-1} \frac{d^{r+1}y}{dx^{r+1}} + P_n \frac{d^r y}{dx^r} = 0$$

la quale, ponendovi $x=\infty$, per le notazioni convenute diverrà:

$$(19) \quad P_0 y_{n,r} + P_1 y_{n-1,r} + P_n y_r = 0.$$

Questa equazione, che ha luogo per tutti i valori interi e positivi di r , compreso il zero, fa sì che le quantità $y_0, y_1, y_2, \dots$ formino una serie ricorrente dell'ordine n . In questa serie, a causa delle n costanti arbitrarie contenute nella espressione di y , data dalla (17), i primi n termini $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$ possono essere dati arbitrariamente; ma ora andremo a dimostrare che, se i loro valori sono quelli che si suppongono dati per la determinazione delle costanti, allora sviluppando la funzione fratta $\frac{\phi(z)}{F(z)}$ in potenze decrescenti di z , la detta serie sarà riprodotta ne' coefficienti di questo sviluppo, di modo che dovrà essere in tale ipotesi:

$$(20) \quad \frac{\phi(z)}{F(z)} = \frac{y_0}{z} + \frac{y_1}{z^2} + \frac{y_2}{z^3} + \dots + \frac{y_{n-1}}{z^n} + \dots$$

Per dimostrarlo osserveremo innanzi tutto che la funzione $\phi(z)$ definita nella (7) si può scrivere come segue:

$$\begin{aligned} \phi(z) = & P_0 y_n z^{n-1} + (P_1 y_n + P_0 y_{n-1}) z^{n-2} + (P_2 y_n + P_1 y_{n-1} + P_0 y_{n-2}) z^{n-3} + \dots + \\ & + (P_{n-1} y_n + P_{n-2} y_{n-1} + \dots + P_0 y_1) z^0 \end{aligned}$$

ma posto per compendio:

$$(21) \quad \begin{cases} q_0 = p_0 y_0 \\ q_1 = p_0 y_1 + p_1 y_0 \\ q_2 = p_0 y_2 + p_1 y_1 + p_2 y_0 \\ \dots \dots \dots \\ q_{n-1} = p_0 y_{n-1} + p_1 y_{n-2} + \dots + p_{n-1} y_0 \end{cases}$$

si avrà più concisamente:

$$\phi(z) = q_0 z^{n-1} + q_1 z^{n-2} + q_2 z^{n-3} + \dots + q_{n-1}.$$

Ora siccome il grado di $\phi(z)$ è inferiore di uno al grado di $F(z)$, lo sviluppo di $\frac{\phi(z)}{F(z)}$ in potenze decrescenti di z comincerà col termine affetto da $\frac{1}{z}$, e quindi si può supporre:

$$\frac{\phi(z)}{F(z)} = \frac{q_0 z^{n-1} + q_1 z^{n-2} + \dots + q_{n-1}}{p_0 z^n + p_1 z^{n-1} + \dots + p_n} = \frac{u_0}{z} + \frac{u_1}{z^2} + \dots + \frac{u_r}{z^{r+1}} + \dots$$

Per determinare i coefficienti osserveremo che si ha identicamente:

$$q_0 z^{n-1} + q_1 z^{n-2} + \dots + q_{n-1} = (p_0 z^n + p_1 z^{n-1} + \dots + p_n)(u_0 z^{-1} + u_1 z^{-2} + u_2 z^{-3} + \dots);$$

laonde sviluppando il prodotto, ed uguagliando i coefficienti delle potenze simili di z ne' due membri, si ottengono le relazioni:

$$(22) \quad \begin{cases} q_0 = p_0 u_0 \\ q_1 = p_0 u_1 + p_1 u_0 \\ q_2 = p_0 u_2 + p_1 u_1 + p_2 u_0 \\ \dots \dots \dots \\ q_{n-1} = p_0 u_{n-1} + p_1 u_{n-2} + \dots + p_{n-1} u_0 \\ 0 = p_0 u_n + p_1 u_{n-1} + \dots + p_{n-1} u_1 \\ 0 = p_0 u_{n+1} + p_1 u_n + \dots + p_{n-1} u_2 \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

e generalmente per qualunque valore intero e positivo di r maggiore di $n-1$ si avrà:

$$0 = p_0 u_{n+r} + p_1 u_{n+r-1} + \dots + p_{n-1} u_{r+1}.$$

Si rileva da questa equazione che le quantità $u_0, u_1, u_2, \dots$ formano, al

pari delle altre $y_0, y_1, y_2, \dots$, una serie ricorrente dell'ordine n , la quale dipende dalla stessa equazione generatrice $F(z)$; ma affinché le due serie possano essere coincidenti è necessario che i primi n termini dell'una siano uguali a' primi n termini dell'altra. Ora ciò segue appunto dal confronto delle equazioni (21) con le (22), le quali danno evidentemente $y_0 = u_0, y_1 = u_1, \dots, y_{n-1} = u_{n-1}$; e con ciò resta dimostrato lo sviluppo della frazione $\frac{\psi(z)}{F(z)}$, come si è supposto nella (20).

Bisogna intanto osservare che lo sviluppo della stessa frazione si può ancora ottenere decomponendola in frazioni parziali, o cercando i loro particolari sviluppi. Essendo $a, b, \dots, l$ le radici dell'equazione $F(z)=0$, multiple rispettivamente di gradi $\alpha, \beta, \dots, \lambda$, la decomposizione condurrà ad un risulamento cui può darsi la forma:

$$\frac{\psi(z)}{F(z)} = \sum_i \frac{A'_{\alpha-i}}{z-a_i} + \sum_j \frac{B'_{\beta-j}}{z-b_j} + \dots + \sum_k \frac{L'_{\lambda-k}}{z-l_k};$$

e quindi y_r , coefficiente della potenza z^{-r-1} nello sviluppo discendente del primo membro, sarà uguale alla somma de' coefficienti della stessa potenza ne' sviluppi somiglianti di tutte le frazioni che compongono il secondo membro; laonde, se si dinota con $V'_{r,i}$ il coefficiente della detta potenza nello sviluppo della prima sommatoria, con $V'_{r,j}$ quello della medesima potenza nello sviluppo della seconda, e così di seguito, si avrà:

$$(23) \quad y_r = V'_{r,i} + V'_{r,j} + \dots + V'_{r,r}.$$

Siccome la frazione sottoposta al primo Σ equivale ad $A'_{\alpha-i}(z-a)^{-\alpha}$, si troverà facilmente per la formola del binomio che la potenza z^{-r-1} ha per coefficiente:

$$\frac{r(r-1)\dots(r-i+2)}{1.2\dots(i-1)} a^{r-i-1} A'_{\alpha-i};$$

e quindi risulta:

$$V'_{r,i} = \sum_j \frac{r(r-1)\dots(r-i+2)}{1.2\dots(i-1)} a^{r-i-1} A'_{\alpha-i}.$$

Questa espressione $V'_{r,i}$ è ciò che diviene quella di $V_{r,i}$ data nella prima delle (18) mutandovi solo $A_{\alpha-i}$ in $A'_{\alpha-i}$; ed è evidente che analoghi risulamenti si otterrebbero per gli altri termini del secondo membro della equazione (23). Ora dovendo questa equazione sussistere per qualsivoglia

pressione non è diversa da quella precedentemente indicata da $V_{\alpha, \beta}$; e però ammettendo che le radici $\alpha, \beta, \dots, l$ dell'equazione $F(x)=0$ siano multiple di gradi $\alpha, \beta, \dots, \lambda$, l'integrale generale della (24) sarà espresso da:

$$(25) \quad y = V_{\alpha, \beta} + V_{\beta, \gamma} + \dots + V_{l, r},$$

coincidendo così esattamente con la formola (10).

Ciò premesso, siccome questa espressione di y contiene n costanti arbitrarie, possiamo proporci di determinarle in guisa che la medesima debba assumere n valori assegnati $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$, quando la variabile x si fa rispettivamente uguale a $0, 1, \dots, n-1$. Ora queste condizioni ci riconducono di nuovo al sistema delle equazioni (11), o per conseguenza alla medesima soluzione; di modo che anche nella quistione attuale i valori delle n costanti:

$$A_0, A_1, \dots, A_{n-1}, B_0, B_1, \dots, B_{n-2}, \dots, L_0, L_1, \dots, L_{n-1}$$

si avranno n numeratori delle frazioni parziali in cui si decompone la funzione fratta $\frac{\phi(x)}{F(x)}$, nella quale il numeratore $\phi(x)$ è sempre la funzione istessa definita dalla formola (7).

Quando le radici di $F(x)=0$ sono tutte disuguali la formola (25) si riduce ad:

$$y = Aa^x + Bb^x + \dots + Lr^x;$$

in tal caso i valori delle costanti sono quelli già dati nelle (16), e l'integrale diverrà:

$$y = \frac{\phi(a)}{F'(a)} a^x + \frac{\phi(b)}{F'(b)} b^x + \dots + \frac{\phi(r)}{F'(r)} r^x.$$

Riflettendo che le quantità $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$, da cui dipendono i valori come sopra determinati delle n costanti arbitrarie, sono esse stesse interamente arbitrarie, si comprende che in ogni caso è lecito di supporre che nella formola (25) le dette costanti abbiano precisamente i valori che risultano da siffatta determinazione, senza che perciò quella formola perda la qualità di integrale generale della equazione (24), a patto però che si ritengano come costanti arbitrarie le stesse quantità $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$. Ma, ciò supposto, è chiaro che il valore di y , diviene il termine generale di una serie ricorrente che ha per generatrice l'equazione $F(x)=0$, ed i cui primi n termini sono appunto $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$; ed andremo a vedere che in tal caso l'espressione di y , o meglio le espressioni delle sue

parti $V_{a,r}, V_{a,r+1}, \dots, V_{a,r+x}$ sono suscettibili di una rimarchevole trasformazione, limitandoci a considerare la prima di esse $V_{a,r}$, imperciocchè le conclusioni si estendono uniformemente a tutte le altre.

Si è già veduto che l'espressione di $V_{a,r}$ si può mettere nella forma:

$$(26) \quad V_{a,r} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{r(r-1)\dots(r-i+2)}{1.2\dots(i-1)} a^{-i} A_{a-i}.$$

Posto ciò, siccome $F(z)$ è divisibile per $(z-a)^a$, chiamando $f(z)$ il quoziente, sarà:

$$(27) \quad F(z) = (z-a)^a f(z);$$

quindi la frazione, che va decomposta in frazioni parziali, diviene:

$$\frac{\phi(z)}{F(z)} = \frac{\phi(z)}{(z-a)^a f(z)};$$

ed i valori di $A_0, A_1, \dots, A_{a-1}$ si avranno dalla formula:

$$A_m = \frac{1}{1.2\dots m} D^m \frac{\phi(a)}{f(a)},$$

dando ad m i valori $0, 1, 2, \dots, a-1$. Così si ottiene:

$$A_{a-i} = \frac{1}{1.2\dots(a-i)} D^{a-i} \frac{\phi(a)}{f(a)};$$

ed in conseguenza la formula (26) si traduce facilmente nell'altra:

$$V_{a,r} = \frac{1}{1.2\dots(a-1)} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(a-1)(a-2)\dots(a-i+1)}{1.2\dots(i-1)} \left[r(r-1)\dots(r-i+2) a^{-i-1} \right] D^{a-i} \frac{\phi(a)}{f(a)}.$$

De' tre fattori che sono in vista sotto il segno Σ il primo è il coefficiente binomiale di rango i relativo all'esponente $a-1$; il secondo è la derivata di ordine $i-1$ della potenza a^r , ed il terzo è la derivata di ordine $a-i$ del fratto $\frac{\phi(a)}{f(a)}$; quindi, richiamandosi al teorema già ricordato sulle derivate di ordine superiore del prodotto di due funzioni, si riconosce che la sommatoria equivale alla derivata di ordine $a-1$ del prodotto $\frac{\phi(a)}{f(a)} a^r$; e con ciò il valore di $V_{a,r}$ verrà trasformato in:

$$(28) \quad V_{a,r} = \frac{1}{1.2\dots(a-1)} D^{a-1} \frac{\phi(a)}{f(a)} a^r.$$

In luogo della funzione f si può nel secondo membro introdurre la

annuncia ne'seguenti termini il teorema che propone a dimostrarci, e del quale ivi è menzione.

« Je fais pour abrégé $\psi(a)$, $a' = \theta(a)$, $\theta(a)$ dénotant, comme l'on voit, « une fonction donnée de a . Je considère ensuite la formule:

$$(30) \quad \frac{\theta(a) + t\theta'(a) + \frac{t^2}{1.2} \theta''(a) + \frac{t^3}{1.2.3} \theta'''(a) + \dots}{F'(a) + \frac{t}{1.2} F''(a) + \frac{t^2}{1.2.3} F'''(a) + \frac{t^3}{1.2.3.4} F^{IV}(a) + \dots}$$

« et après l'avoir développée en série suivant les puissances ascendantes « de t , je ne retiens que les termes ou t ne se trouve point, en rejetant « ceux qui se trouveront divisés ou multipliés par des puissances de t ; « je dis que ces termes seront ceux de l'expression du terme général y , « qui proviendront de la racine a , soit que cette racine soit une racine « simple, ou double, ou triple, etc. ».

Ora questo teorema discende ancora immediatamente dalla formola (28); ma prima di dimostrarlo sarà opportuno di modificare alquanto l'enunciato di LAGRANGE. È evidente in primo luogo che il numeratore della formola (30) non è che lo sviluppo in potenze ascendenti di t di $\theta(a+t)$, e però anche del prodotto $\psi(a+t)/\phi(a+t)$. Inoltre è chiaro che, se il denominatore della formola istessa si moltiplica per t , allora il termine indipendente da t nello sviluppo di quella formola, in virtù della introduzione del fattore t nel suo denominatore, diverrà il coefficiente della potenza $\frac{1}{t}$; ma frattanto per la introduzione di un tal fattore il denominatore diverrà lo sviluppo di $F(a+t) - F(a)$ o semplicemente di $F(a+t)$, perchè a essendo per ipotesi radice dell'equazione $F(x)=0$, si ha $F(a)=0$. Segue da queste osservazioni che il termine indipendente da t nello sviluppo della formola (30) in potenze ascendenti di t coincide col coefficiente di $\frac{1}{t}$ nello sviluppo somigliante di

$$(31) \quad \frac{\psi(a+t)}{F(a+t)} (a+t)^{-1}.$$

Dunque, siccome secondo le nostre notazioni la parte del termine generale y , dovuta alla radice a , è figurata da $V_{...}$, il teorema di LAGRANGE equivale in altri termini a dire, che: il valore di $V_{...}$ dev'essere uguale al coefficiente di $\frac{1}{t}$ nello sviluppo in potenze ascendenti di t della formola (31); ed eccone la dimostrazione.

Posto per compendio:

$$(32) \quad \varphi(a) = \frac{\psi(a)}{f(a)} a^r$$

si avrà per la (28)

$$(33) \quad V_{a+r} = \frac{\varphi^{h-1}(a)}{1.2 \dots (a-1)}.$$

Ora se nella (32) si ponga $a+t$ in luogo di a , verrà:

$$\varphi(a+t) = \frac{\psi(a+t)}{f(a+t)} (a+t)^r;$$

e se i due membri si dividano per t^r , si avrà in virtù della (29):

$$(34) \quad \frac{1}{t^r} \varphi(a+t) = \frac{\psi(a+t)}{f(a+t)} (a+t)^r.$$

Sviluppando i due membri secondo le potenze ascendenti di t saranno eguali ne' due sviluppi i coefficienti delle stesse potenze di x ; ed è poi chiaro che il secondo conterrà necessariamente, al pari del primo, delle potenze negative di t . Intanto posto mente alla (33) si vede che il valore di V_{a+r} coincide col coefficiente della potenza t^{a-1} nello sviluppo di $\varphi(a+t)$; esso dunque nello sviluppo di $\frac{\varphi(a+t)}{t}$, ossia del primo membro della (34), coinciderà col coefficiente della potenza $\frac{1}{t}$; e per conseguenza dovrà pure coincidere col coefficiente della stessa potenza nello sviluppo del secondo membro, vale a dire della formola (31); e con ciò resta dimostrato il teorema di LAGRANGE.

Questo teorema importante è il fondamento delle ricerche da noi esposte nella Memoria *sullo sviluppo delle funzioni fratte razionali*.

56N
607156

